Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из анализе са алгебром -

Теореме о фиксној тачки

Ученик:
Никола Садовек
IVд

Ментор:
др Соња Чукић

Београд, јун 2016.

Садржај

1

Увод

Теореме о фиксној тачки тврде да одређене класе функција (за које важе неки услови) имају бар једну фиксну тачку. Оне су откриване почетком 20. века, а данас постоји више таквих теорема. У овом раду ћемо се позабавити само некима од њих.
Оне чине веома битну карику у математици, па су тако нашле своју примену у многим областима математике укључујући алгебарску топологију, линеарну алгебру, функционалну анализу, теорију игара, као и многе друге. Данас се оне користе и у другим наукама, као што су информатика и економија.
Неке од ових теорема имају конструктивне доказе, па су нашле примену у бизнису - на пример у претраживању података на интернету. За њих се може рећи да нису чисто научног карактера, за разлику од осталих које само доказују постојање фиксне тачке. То је нервирало многе математичаре који су веровали да такав приступ нема примену. Холандски математичар Брауер се чак одрекао своје теореме о фиксној тачки јер се из ње не може ништа закључити о фиксној тачки осим једне ствари: да постоји. Брауер је уједно и зачетник једне гране филозофије, интуитизма, која вреднује математичке резултате који су конструктивне, а не само егзистенцијалне природе.
Поред тога што је ова област изузетно битна у математици, она је веома лепа и занимљива. Пошто се у једном овако кратком раду не може потпуно дочарати утицај ове области на математику, покушао сам да издвојим неке интересантне резултате.
Рад за идеју има да читаоцу бар мало приближи разне приступе математичким проблемима користећи теореме о фиксној тачки. Такође, читалац може видети да та једноставна идеја(постојање фиксне тачке) игра круцијалну улогу чак и у неким актуелним математичким дисциплинама.

2

Основни појмови

Дефиниција 2.1. *Метрички простор* је уређени пар (X, d), где је X скуп а d функција (тј. метрика над X) таква да $d{:}X \to \mathbb{R}$ и важи:
(1) $d(x, y) \geqslant 0$, $\forall x, y \in X$;
(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (рефлексивност);
(3) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$ (симетричност);
(4) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$ (неједнакост троугла).

Најчешће коришћена метрика, и најинтуитивнија, је природна метрика над $\mathbb{R}$ дефинисана са $d(x, y) = |x - y|$. Још један пример метрике је она дефинисана на $\mathbb{R}^n$ као $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$, где су вектори $x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. Ова метрика се зове Еуклидска метрика.

Дефиниција 2.2. Нека је (X, d) матрички простор. Тај метрички простор је *комплетан* ако сваки низ $(x_i)_{i=k}^{\infty}$ из X који конвергира, има лимес у скупу X.

Дефиниција 2.3. Нека је (X, d) матрички простор. Скуп $Y \subset X$ је *отворен* ако за свако $y \in Y$ постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $\{x \in X : d(y, x) < \varepsilon\} \subset Y$.

Дефиниција 2.4. Нека је (X, d) матрички простор. За ∂Y кажемо да је *граница* скупа $Y \subset X$ ако за свако $x_0 \in \partial Y$ и свако $\varepsilon > 0$ постоје $a \in Y$ и $b \in X - Y$ такви да $d(x_0, a), d(x_0, b) < \varepsilon$..

Скуп $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$ се назива *затворење* скупа Y. Ако је Z затворен, онда је $Z^o := Z - \partial Z$.

Дефиниција 2.5. Тополошки простор X је *компактан* ако сваки отворени прекривач скупа X садржи коначан потпокривач скупа X.

Компактност је, на неки начин, генерализација коначности скупа. У сврху одржања компактности приликом пресликавања је следеће две дефиниције.

Дефиниција 2.6. Нека је V векторски простор над пољем K. *Норма* над V је функција $f : V \to \mathbb{R}$ која за свако $\alpha \in K$ и $u, v \in V$ задовољава
(1)$f(\alpha v) = |\alpha| f(v)$
(2)$f(u + v) \leqslant f(u) + f(v)$
(3)$f(v) = 0$ ако је v нула вектор.

Дефиниција 2.7. Векторски простор X је *Банахов* ако има норму и ако је комплетан у односу на ту норму.

Банахови простори су битни јер, поред тога што имају норму која индукује метрику над X, погодни су за изучавање непрекидних фунцкија које чувају конвергенцију и компактност.

Дефиниција 2.8. Нека су V и W векторски простори над пољем K. Функција $L : V \to W$ се зове *оператор*. Ако за свака два вектора $x, y \in V$ и скалар $\alpha \in K$ важи $L(x+y) = L(x) + L(y)$ и $L(\alpha x) = \alpha L(x)$, онда је она *линеарни оператор.*

Дефиниција 2.9. Ограничен линеарни оператор $L : X \to Y$ је онај за који постоји $M > 0$ такво да је

$$\|Lx\|_Y \leqslant M \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Уколико постоји, најмање такво M се зове норма оператора L.

Дефиниција 2.10. Нека су X и Y Банахови простори. Линеарни оператор $L : X \to Y$ је *компактан* ако је за сваки ограничен подскуп $Z \subset X$, $L(Z)$ релативно компактан (тј. затворење му је компактно).

Такав оператор је обавезно ограничен, па је непрекидан, што му даје лепа својства наведена горе.

Дефиниција 2.11. Нека је X тополошки простор. Он је *локално компактан* ако свака тачка $x \in X$ има компактну околину.

Да локална компактност није исто што компактност, говори нам једноставан пример: скуп $\mathbb{R}$ није компактан, али је локално компактан.

Дефиниција 2.12. Нека је X нормирани векторски простор. Он је *униформно конвексан* ако за свако $0 < \varepsilon \leqslant 2$ постоји $\delta > 0$ такво да за било које $x, y \in X$ за које важе $\|x\| = \|y\| = 1$, услов

$$\|x - y\| \leqslant \varepsilon$$

имплицира

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leqslant 1 - \delta.$$

На интуитивном нивоу, ова дефиниција значи да средиште било које тетиве јединичне лопте мора да лежи дубоко унутар јединичне лопте, осим ако тетива није много мала.

Дефиниција 2.13. Нека је X тополошки простор и f фунцкија $f : X \to \mathbb{R}$. *Подршка* фунцкије f на X је скуп

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

За фунцкију f кажемо да је подржана да $Y \subset X$ ако важи $\operatorname{supp}(f) \subset Y$.

Дефиниција 2.14. Нека је X тополошки простор. X се назива *нормалан* ако сваке две различите тачке имају дисјунктне затворене околине.

3

Банахова теорема о фиксној тачки

Можда најједноставнија, али не и најмање битна теорема о фиксној тачки. Због свог једноставног и конструктивног доказа је нашла примену у разним наукама.

Дефиниција 3.1. Нека је (X, d) матрички простор. Функција $f : X \to X$ се зове *контракција* на X ако постоји $q \in [0, 1)$ такво да $d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$ за све $x, y \in X$.

Теорема 3.1. Нека је (X, d) комплетан метрички простор са контракцијом f. Тада је f непрекидна функција. Овакве функције се зову Липшиц[1]-непрекидне.

Доказ. Непрекидност у тачки $x \in X$ значи да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да кад год је $d(x, y) < \delta$ онда је $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
Ако за неко $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ узмемо $\delta = \dfrac{\varepsilon}{q}$, тада $d(x, y) < \delta$ повлачи

$$d(f(x), f(y)) \leqslant qd(x, y) < q\frac{\varepsilon}{q} = \varepsilon.$$

□

Теорема 3.2. (Банахова[2] теорема о фиксној тачки)Нека је (X, d) комплетан метрички простор са контракцијом f. Тада постоји јединствено $x \in X$ такво да је $f(x) = x$.

Доказ. Нека је $x_0 \in X$. Дефинишимо $x_n = f(x_{n-1})$ за $n \in \mathbb{N}$. Тада је

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant qd(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq q^n d(x_1, x_0) \text{ за } n \in \mathbb{N}.$$

[1] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903), немачки математичар, познат по свом доприносу математичкој анализи, деференцијалној геометрији и теорији бројева.

[2] Stefan Banach (1892-1945), пољски математичар, познат по свом доприносу у пољу функционалне анализе. Сматра се једним од најважнијих математичара 20. века.

Такође је, по неједнакости троугла

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant d(x_m, x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leqslant q^{m-1} d(x_1, x_0) + \cdots + q^n d(x_1, x_0) = q^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{m-n-1} q^i \\ &\leqslant q^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0), \text{ за } m, n \in \mathbb{N}_0 \text{ за које је } m > n. \end{aligned}$$

Одавде видимо да је $\big(x_n\big)$ Кошијев низ. Он има лимес и тај лимес је неко $x \in X$. Пошто је, по теореми 3.1, f непрекидна:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = f(x).$$

Дакле x је фиксна тачка функције f. Тиме смо доказали постојање фиксне тачке. Још треба показати да је она јединствена.
Нека за неко $u \in X$ важи $f(u) = u$. Тада је $d(x, u) \leqslant qd(f(x), f(u)) = qd(x, u)$, па је $0 \leqslant (q-1)d(x, u)$, а пошто је $q \in [0, 1)$, мора бити $d(x, u) = 0$, тј. $x = u$. $\square$

3.1 Матричне једначине

Матрична једначина се може посматрати као систем линеарних једначина. Са њима се сусрећемо често, а њихово решавање некад може да буде незгодан посао. Поготово када је реч о програмирању, налажење општег решења је често практично немогуће. У сврху тога, поред доказа да постоји решење одређене класе тих система, доказ се може искористити за приближно налажење тог решења.
Посматрајмо систем линеарних једначина задат матричном једначином

$$Ax = b,$$

где $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}, x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T, b = (b_1, b_2, ..., b_n)^T$.
Тај систем можемо другачије написати као:

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 &= -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ x_n &= -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (1 - a_{nn})x_n + b_n. \end{aligned}$$

За $1 \leqslant i, j \leqslant n$, нека је $\alpha_{ij} := -a_{ij} + \delta_{ij}$ (где је δ_{ij} Кронекерова делта функција). Тај систем можемо записати као

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + b_i, \text{ за свако } i = 1, ..., n.$$

Видимо да је једначина $Ax = b$ еквивалентна са $x - Ax + b = x$. Дефинишимо финкцију $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f(x) = x - Ax + b.$$

Тада нам је решавање $Ax = b$ еквивалентно са налажењем фиксне тачке функције f. Прво, приметимо да за $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) =&(x - Ax + b) - (y - Ay + b) = (x - y) - (Ax - Ay) \\ =&(x - y) - A(x - y) = (I - A)(x - y). \end{aligned}$$

Доказаћемо да $Ax = b$ има јединствено решење ако

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \leqslant q < 1, \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Дефинишимо метрику d на $\mathbb{R}^n$, $d(u, v) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |u_i - v_i|$. Тада

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(x_j - y_j)| \\ &\leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}||(x_j - y_j)| \\ &\leqslant \big(\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|\big)\big(\sup_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j - y_j|\big) \\ &= \big(\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} (\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|\big) d(x, y) \leqslant q d(x, y), \end{aligned}$$

што значи да је f контракција на $\mathbb{R}^n$. По теореми 3.1. ово завршава доказ.$\square$

3.2 Функције реалне променљиве

Пошто користи Банахову теорему, ова последица се може искористити за налажење нула функција које имају одређена својства. На пример, метод итерације у нумеричкој анализи, се позива баш на ово тврђење за налажење нула функција са унапред задатом тачношћу.
Посматрајмо метрички простор (X, d) где је $X = \mathbb{R}$ и d стандардна, Еуклидска, метрика над $\mathbb{R}$. Нека је $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и нека је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,непрекидна на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b), функција за коју важи

$$\|f'\|_{l^\infty} = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)| \leqslant q < 1.$$

Занима нас решење једначине $f(x) = x$.
За било које $x, y \in [a, b]$ и $x < y$, по Лагранжовој теореми имамо да постоји $z \in (a, b)$ такво да $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$ дакле

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x - y| \leqslant q|x - y|.$$

Из тога видимо да је f контракција, па на основу теореме 3.1, постоји јединствено x^* такво да је $f(x^*) = x^*$.

3.3 Пикар-Линделефова теорема

Пикар-Линделефова теорема се може генерализовати да би се установило постојање јединственог решења диференцијалних једначина вишег степена. Takође, она представља увод у широку класу теорема о постојању јединствене фиксне тачке.

Теорема 3.3. (Пикар[3]-Линделефова[4])Нека су $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и нека је

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}.$$

Ако је $f : A \to \mathbb{R}$ Липшиц-непрекидна по другој променљивој и $(x_0, y_0) \in A^o$, тада обична диференцијална једначина $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ има јединствено решење $y = g(x)$, дефинисано на интервалу $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ за неко $\varepsilon > 0$, које задовољава $g(x_0) = y_0$.

[3]Charles Émile Picard (1856-1941), француски математичар, познат по свом доприносу математичкој анализи и теорији група. Један од зачетника алгебарске топологије.

[4]Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946), фински математичар, познат по свом доприносу топологији и диференцијалним једначинама

Доказ. По основној теореми калкулуса, решавање наше диференцијалне једначине је еквивалентно са налажењем јединственог решења интегралне једначине

$$g(x) = g(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))dt.$$

Нека је $q > 0$ константа таква да $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant q|y_1 - y_2|$ за све $(x, y_1), (x, y_2) \in A$ (она постоји јер је f Липшиц-непрекидна по другој промењивој). Пошто је $A \subset \mathbb{R}^2$ компактан и f непрекидна, f мора бити ограничена неком константом $M > 0$.
Изаберимо $\varepsilon > 0$ такво да важи $\varepsilon < q^{-1}$ и за скуп

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon, y_0 - M\varepsilon \leqslant y \leqslant y_0 + M\varepsilon\}$$

важи $B \subset A$. Нека је X подскуп $(C([x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]), d)$ функција g таквих да је $d(g, g(x_0)) \leqslant M\epsilon$, где је $d(\cdot, \cdot) = \|\cdot - \cdot\|_{l^\infty}$ а $C([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon])$ скуп непрекидних функција на $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Приметимо да је (X, d) затворен простор. Дефинишимо

$$h = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))dt.$$

Тада је

$$\begin{aligned}
d(h, y_0) &= \sup_{x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} |(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))dt) - y_0| \\
&\leqslant \sup_{x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} \int_{x_0}^{x} |f(t, g(t))|dt \\
&\leqslant \sup_{x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} \int_{x_0}^{x} M dt = M\varepsilon, \text{ па } h \in X.
\end{aligned}$$

Дефинишимо пресликавање $T : X \to X$ на следећи начин: $Tg = h$. Доказаћемо да је T контракција. Наиме, за $g_1, g_2 \in X$ имамо

$$\begin{aligned}
d(Tg_1, Tg_2) &= \sup_{x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} |(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g_1(t))dt) - (y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g_2(t))dt)| \\
&\leqslant \sup_{x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} \int_{x_0}^{x} |f(t, g_1(t)) - f(t, g_2(t))|dt \\
&\leqslant \sup_{x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} \int_{x_0}^{x} q|g_1(t) - g_2(t)|dt \\
&\leqslant d(g_1, g_2) \sup_{x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} \int_{x_0}^{x} q dt \\
&= q\varepsilon d(g_1, g_2) = kd(g_1, g_2), \text{ где је } k = q\varepsilon \in [0, 1).
\end{aligned}$$

Дакле T је контракција, па је због теореме 3.1, доказ завршен. □

3.4 Изненађујућа примена: PageRank алгоритам

Гуглов успех као претраживача долази из тзв. PageRank алгоритма. Алгоритам тражи фиксну тачку линеарног оператора над $\mathbb{R}^n$ који је контракција, и та фиксна тачка (тј. вектор) заправо одређује популарност страница. У пракси, фиксна тачка (која има сопствену вредност 1) се приближно рачуна као λA^n за n довољно велико (где је λ вектор почетног стања, а A матрица). Видели смо предности теореме о фиксној тачки која има донекле конструктивни доказ јер тада сам доказ каже како се може доћи до фиксне тачке са одређеном тачношћу. Конкретно у Банаховој теореми, до фиксне тачке се долази у лимесу. Зато се она искористила у технологији и заслужна је за Гуглов успех.
Да доказ постојања фиксне тачке није увек конструктиван, тј. да се из њега не може наћи фиксна тачка, показаће нам остатак овог рада.

4

Рисова ергодична теорема о средњој вредности

Лепота ове теореме лежи у томе да она на неки начин укроти једну, на први поглед дивљу, суму. Такође, та сума се испоставља да је пројекција, које имају примену у Хилбертовим просторима.

Дефиниција 4.1. Ако су M и N потпростори векторског простора X такви да се свако $x \in X$ може записати као $x = y + z$, где је $y \in M$ и $z \in N$, тада кажемо да је $X = M \oplus N$ *директна сума* потпростора M и N. Такође кажемо да је N *комплементаран потпростор* потпростора M.

Разлагање вектора $x = y + z$, за $y \in M$ и $z \in N$ је јединствено ако и само ако $M \cap N = \{0\}$. За фиксирани потпростор M може да постоји више комплементарних потпростора. На пример, ако је $X = \mathbb{R}^3$ и M раван која пролази кроз нулу, тада је било која права која пролази кроз координатни почетак, а која не лежи на M, комплементарни потпростор за M. Такође сви комплементарни потпростори потпростора M имају исту димензију која се назива *кодимензија* од M у X.
Ако је $X = M \oplus N$, онда дефинишемо пројекцију $P : X \to X$ простора X на M низ N где је $x = y + z$, $y \in M$ и $z \in N$. Ова пројекција је линеарни оператор, са $\operatorname{ran}(P) = M$ и $\ker(P) = N$ и задовољава $P^2 = P$ (са $\operatorname{ran}(P)$ се означава кодомен линеарног оператора P, а са $\ker(P)$ се означава језгро, тј. подскуп од X такав да се сваки елемент тог подскупа слика у 0).

Дефиниција 4.2. Нека је X векторски простор. Линеарни оператор $P : X \to X$ се зове *пројекција* ако је

$$PPx = Px \text{ за све } x \in X.$$

Важи $\ker(P) = \operatorname{ran}(\mathbb{I} - P)$,$\operatorname{ran}(P) = \ker(\mathbb{I} - P)$ и $\ker(P) \cap \operatorname{ran}(P) = 0$. Такође, сваки елемент $x \in X$ се може јединствено написати као $x = y + z$, где је $y = Px \in \operatorname{ran}(P)$ и $z = (\mathbb{I} - P)x \in \ker(P)$.

Теорема 4.1. Ако је X Банахов простор, тада је пројекција P непрекидна ако и само ако је $X = \operatorname{ran}(P) \oplus \ker(P)$.

Нотација $X = A \oplus B$ значи да су A и B затворени потпростори од X такви да $A \cap B = \{0\}$ и $A \cup B = X$.

Доказ. Ако је P непрекидна, онда је и $\mathbb{I} - P$, па су $\ker(P)$ и $\ker(\mathbb{I} - P) = ran(P)$ затворени.
Са друге стране, нека је (x_n) било који низ из X такав да $x_n \to x$, и нека $Px_n \to y$. Пошто је $\operatorname{ran}(P)$ затворен, $y \in \operatorname{ran}(P)$ па је $Py = y$. Пошто важи $x_n - Px_n = (\mathbb{I} - P)x_n \in \operatorname{ran}(\mathbb{I} - P) = \ker(P)$ и $\ker(P)$ је затворен па $x - y \in \ker(P)$ што значи да је $Px = Py = y$, тј. $x_n \to x$ и $Px_n \to y = Px$ што значи да је P непрекидна. $\square$

Теорема 4.2. (Рисова[5]) Нека је X униформно конвексни Банахов простор и нека је $T : X \to X$ линеарни оператор такав да

$$\|Tx\| \leqslant \|x\|, \text{ за свако } x \in X.$$

Тада за свако $x \in X$ лимес

$$p_x = \lim_{n \to \infty} \frac{x + Tx + \cdots + T^n x}{n + 1}$$

постоји. Такође, оператор $P : X \to X$ дефинисан са $Px = p_x$ је непрекидна пројекција на векторски простор $M = \{y \in X : Ty = y\}$.

Доказ. Фиксирајмо $x \in X$ и нека је

$$C = \overline{\{\alpha_1 x + \cdots + \alpha_m T^m x : m \in \mathbb{N}, \alpha_i \geqslant 0 \text{ и } \alpha_1 + \cdots \alpha_m = 1\}}.$$

C је затворен непразан конвексан скуп, а из униформне конвексности X постоји јединствено $p_x \in C$ такво да је $\mu = \|p_x\| = \inf\{\|z\| : z \in C\}$.
Узмимо $\varepsilon > 0$. Тада за $p_x \in C$ постоји $m \in \mathbb{N}$ и ненегативне константе $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m$ такве да за $\sum_{j=0}^{m} \alpha_j T^j x$ важи $\|p_x - z\| < \varepsilon$ (из дефиниције C). Тада је, за свако $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \frac{z + Tz + \cdots + T^n z}{n + 1} \right\| \leqslant \mu + \varepsilon$$

Пошто је
$z + Tz + \cdots + T^n z = (\alpha_0 x + \cdots + \alpha_m T^m x) + \cdots + (\alpha_0 T^n x + \cdots + \alpha_m T_{m+n} x)$, одабиром $n \gg m$ добијамо $z + Tz + \cdots + T^n = x + Tx + \cdots + T^n x + r$ где је

$$\begin{aligned} r = &(\alpha_0 - 1)x + \cdots + (\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{m-1})T^{m-1}x \\ &+ (1 - \alpha_0)T^{n+1}x + \cdots + (1 - \alpha_0 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_{m-1})T^{n+m}x. \end{aligned}$$

[5] Frigyes Riesz (1880–1956), мађарски математичар, који је поставио основе функционалне анализе

Циљ нам је да $\left\|\dfrac{x+Tx+\cdots+T^n x}{n+1}\right\|$ ограничимо са обе стране и тако докажемо да лимес из формулације теореме постоји. Наиме,

$$\frac{x+Tx+\cdots+T^n x}{n+1}=\frac{z+Tz+\cdots+T^n z}{n+1}-\frac{r}{n+1},$$

а пошто је

$$\left\|\frac{r}{n+1}\right\|\leqslant\frac{2m\|x\|}{n+1},$$

одабиром $n>\dfrac{2m\|x\|}{\varepsilon}-1$ биће $\left\|\dfrac{r}{n+1}\right\|<\varepsilon$. Дакле

$$\left\|\frac{x+Tx+\cdots+T^n x}{n+1}\right\|\leqslant\mu+2\varepsilon.$$

Са друге стране је

$$\left\|\frac{x+Tx+\cdots+T^n x}{n+1}\right\|\geqslant\mu,$$

(јер $\dfrac{x+Tx+\cdots+T^n x}{n+1}$ припада C), па важи

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x+Tx+\cdots+T^n x}{n+1}\right\|=\mu=p_x.$$

Још треба да докажемо да је $Px=p_x$ непрекидна пројекција на M. Лако видимо да ако је $x\in M$ (што значи да је $Tx=x$), онда је $Px=x$. Такође је

$$Tp_x=\lim_{n\to\infty}\frac{Tx+T^2x+\cdots+T^{n+1}x}{n+1}=p_x+\lim_{n\to\infty}\frac{T^{n+1}x-x}{n+1}=p_x$$

јер $\left\|\dfrac{T^{n+1}x-x}{n+1}\right\|\leqslant\dfrac{\|T^{n+1}x\|+\|x\|}{n+1}\leqslant\dfrac{2\|x\|}{n+1}\to 0.$

Коначно, важи $P^2x=PPx=Pp_x=p_x=Px$. Непрекидност следи из услова $\|p_x\|\leqslant\|x\|$. $\square$

5

Брауерова теорема о фиксној тачки

Брауерова теорема је изузетно битан математички резултат са применом у многим пољима математике. Поред наведених примена, она се користи у теорији графова, молекуларној физици, итд.

Дефиниција 5.1. Нека је $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$. Подскуп $E \cap \mathbb{D}^n$ се зове *контракција* скупа $\mathbb{D}^n$ ако постоји непрекидно пресликавање $r : \mathbb{D}^n \to E$ такво да је $r(x) = x$ за свако $x \in E$.

Користићемо једну лему која се доказује преко алгебарске топологије, чији доказ ћемо изоставити.

Лема 5.1. Скуп $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ није контракција скупа $\mathbb{D}^n$.

Теорема 5.1. (Брауерова[6] теорема о фиксној тачки) Нека је $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ непрекидна функција. Тада f има фиксну тачку $\bar{x} \in \mathbb{D}^n$.

Доказ. Претпоставимо да f нема фиксну тачку. Функција $r : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ дефинисана са

$$r(x) = t(x)f(x) + (1 - t(x))x,$$

где је

$$t(x) = \frac{\|x\|^2 - \langle x, f(x)\rangle - \sqrt{(\|x\|^2 - \langle x, f(x)\rangle)^2 + (1 - \|x\|^2)\,\|x - f(x)\|^2}}{\|x - f(x)\|^2},$$

представља пресек $\mathbb{S}^{n-1}$ са правом коју добијамо када спојимо $f(x)$ и x. Видимо да је $r(x)$ контракција из $\mathbb{D}^n$ на $\mathbb{S}^{n-1}$, што по леми 5.1. није могуће. Дакле f има фиксну тачку. $\square$

Приметимо да ако је f непрекидна, по Стоун[7]-Вајерштрасовој[8] теореми, постоји низ $f_j : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ конвергентних функција које униформно конвергирају ка f на $\mathbb{D}^n$. Ако са $\bar{x}_j \in \mathbb{D}^n$ означимо фиксну тачку функције f_j, тада

[6] Luitzen Egbertus Jan Brouwer(1881–1966), холандски математичар и филозоф, познат по свом доприносу топологији, теорији скупова, теорији мера и комплексној анализи

[7] Marshall Harvey Stone (1903–1989), амерички математичар, познат по свом доприносу реалној анализи, функционалној анализи и топологији.

[8] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), немачки математичар, познат под називом „отац модерне анализе". Највише је допринео развоју реалне анализе.

постоји $\bar{x} \in \mathbb{D}^n$ такво да, до на подниз, $\bar{x_j} \to \bar{x}$. Дакле,

$$\|f(\bar{x}) - \bar{x}\| \leqslant \|f(\bar{x}) - f(\bar{x_j})\| + \|f(\bar{x_j}) - f_j(\bar{x_j})\| + \|\bar{x_j} - \bar{x}\| \to 0 \text{ кад } j \to \infty,$$

из чега следи $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Сада ћемо видети једно битно уопштење ове теореме.

Лема 5.2. Нека је K непразан компактан конвексан подскуп коначно-димензионог реалног Банаховог простора X. Тада свака непрекидна функција $f : K \to K$ има фиксну тачку.

Доказ. Пошто је X хомеоморфан са $\mathbb{R}^n$ за неко $n \in \mathbb{N}$, без умањења општости можемо претпоставити да је $X = \mathbb{R}^n$. Такође, можемо претпоставити да је $K \subset \mathbb{D}^n$. За свако $x \in \mathbb{D}^n$, нека је $p(x) \in K$ јединствена тачка која задовољава

$$\|p(x)\| = \inf_{y \in x-K} \|y\|\,.$$

Може се рећи да је за $x \in \mathbb{D}^n, x \notin K$, $p(x)$ најближа тачка скупа K тачки x). Види се да је $p(x) = x$ за свако $x \in K$.
Приметимо да је p непрекидна на $\mathbb{D}^n$. Наиме, за $x_n, x \in \mathbb{D}^n$ и $x_n \to x$ важи

$$\|x - p(x)\| \leqslant \|x - p(x_n)\| + \|x - x_n\| + \inf_{k \in K} \|x_n - k\| \to_{n\to\infty} \|x - p(x)\|\,.$$

Дакле, због јединствености тачке $p(x)$, $p(x_n) \to p(x)$ кад $x_n \to x$, па видимо да је p непрекидна.
Дефинишимо функцију $g : \mathbb{D}^n \to K$ са $g(x) = f(p(x))$. Она је непрекидна па из теореме 5.1. постоји $\bar{x} \in K$такво да је $\bar{x} = g(\bar{x}) \in K$ па важи $\bar{x} = g(\bar{x}) = f(\bar{x})$, ондосно $\bar{x}$ је фиксна тачна функције f. □

5.1 Фробениусова теорема

Један од услова да би PageRank алгоритам радио је, између осталог, и резултат ове теореме. Поред PageRank алгоритма, ова теорема се користи у инжењерству, теорији графова, вероватноћи, теорији динамичких система, економији, демографији, чак и у поређењу фудбалски тимова.

Теорема 5.2. (Фробениусова[9])Нека је $\mathbb{A}$ $n \times n$ матрица са позитивним вредностима. Тада $\mathbb{A}$ има позитивну сопствену вредност.

Доказ. Матрица $\mathbb{A}$ се може посматрати као линеарно пресликавање из $\mathbb{R}^n$ у $\mathbb{R}^n$. Посматрајмо компактан конвексан скуп

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, x_j \geqslant 0 \text{ за свако } j = 1, ..., n\}$$

[9]Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917), немачки математичар, познат по свом доприносу теорији елиптичких функција, диференцијалним једначинама и теорији група.

и дефинишимо

$$f(x) = \frac{\mathbb{A}x}{\|\mathbb{A}x\|_1}$$

(где је $\|\cdot\|_1$ еуклидска 1-норма). Приметимо да ако је $x \in K$, онда су све координате вектора x ненегативне и бар једна је позитивна, па су све координате вектора $\mathbb{A}x$ позитивне. Дакле, f је непрекидна функција која слика K у K, па из Леме 5.2. постоји $\bar{x} \in K$ такво да $\bar{x} = f(\bar{x}) = \frac{\mathbb{A}\bar{x}}{\|\mathbb{A}\bar{x}\|_1}$ тј. $\mathbb{A}\bar{x} = \|\mathbb{A}\bar{x}\|_1 \bar{x}$. □

5.2 Основна теорема алгебре

За тврђење ове теореме се доста дуго претпостављало да важи, али она је доказана релативно касно: почетком 20. века. Доказ није од неке нарочите користи за тражење нула полинома (које се најчешће налазе нумеричким методама), али је свакако део математичке пузле који је фалио.

Теорема 5.3. Нека је $p(z) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n z^n$ полином са комплексним коефицијентима степена $n \geq 1$. Тада постоји $z_0 \in \mathbb{C}$ такво да је $p(z_0) = 0$.

Доказ. Нека је, без умањења општости, $a_n = 1$ и нека је $r = 2+|a_0|+\cdots+|a_{n-1}|$. Дефинишимо непрекидну функцију $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ на следећи начин:

$$g(z) = \begin{cases} z - \frac{p(z)}{r} e^{i(1-n)\theta} & , |z| \leqslant 1, \\ z - \frac{p(z)}{r} z^{1-n} & , |z| > 1, \end{cases} \tag{1}$$

где је $z = \rho e^{i\theta}$ за $\theta \in [0, 2\pi)$. Посматрајмо компактан и конвексан скуп $C = \{z : |z| \leqslant r\}$. Да бисмо применили Брауерову теорему, морамо да покажемо да је $g(C) \subset C$. Заиста, за $|z| \leqslant 1$

$$|g(z)| \leqslant |z| + \frac{|p(z)|}{r} \leqslant 1 + \frac{1 + |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|}{r} \leqslant 2 \leqslant r$$

У супротном, за $1 < |z| \leqslant r$, имамо

$$\begin{aligned} g(z) &\leqslant |z - \frac{p(z)}{rz^{n-1}}| = |z - \frac{z}{r} - \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}}{rz^{n-1}}| \\ &\leqslant r - 1 + \frac{|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|}{r} \\ &\leqslant r - 1 + \frac{r-2}{r} \leqslant r. \end{aligned}$$

Дакле C је инваријантан за g, па g има фиксну тачку $z_0 \in C$ за коју видимо је корен полинома p. □ □

6

Шеферова теорема о фиксној тачки

Шеферова теорема је невероватно јака. Наиме, она каже да једна огромна класа функција има фиксну тачку. Да бисмо доказали Шеферову теорему, биће нам потребно неколико тврђења.

Лема 6.1. Нека је X нормалан тополошки простор и нека $A \subset U \subset X$, где је A затворен скуп а U отворен. Тада постоји отворен скуп V за који важи $A \subset U \subset \overline{U} \subset X$.

Доказ. Пошто су A и $X - U$ затворени и дисјунктни, а X је нормалан, постоје $V, W \subset X$ отворени скупови такви да $A \subset V, X - U \subset W$ и $V \cap W = \emptyset$. Пошто је $V \subset X - W$, а $X - W$ је затворен, важи $\overline{V} \subset X - W$ па V задовољава услове леме. $\square$

Лема 6.2 (О смањивању)**.** Ако је $\mathcal{U} = \{U_i : i = 1, ..., n\}$ било који отворени покривач нормалног простора X, постоји покривач $\mathcal{V} = \{V_i : i = 1, ..., n\}$ за који важи

$$\overline{V_i} \subset U_i, \text{ за све } i = 1, ..., n.$$

Доказ. Нека је $W_1 = X - U_2 \cup \dots \cup U_n$. Приметимо да је $W_1 \subset U_1$ и W_1 је затворен, а U_1 отворен, што значи да по леми 6.1. постоји отворен V_1 такав да $W_1 \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1$. Сада видимо да $\{V_1, U_2, ..., U_n\}$ представља прекривач простора X, па ако применимо то још $n - 1$ пута, добићемо да $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ представља прекривач простора X(где су $V_2, ..., V_n$ дефинисани аналогно као V_1). $\square$

Следећи лему ћемо навести без доказа, јер је он чисто техничке природе и нема пуно контакта са овим радом.

Лема 6.3. (Урисонова[10]) Тополошки простор X је нормалан ако и само ако за свака два његова затворена дисјунктна подскупа A и B постоји непрекидна функција $f : X \to \mathbb{R}$ таква да је $f(A) = 1$ и $f(B) = 0$.

[10]Pavel Samuilovich Urysohn (1898–1924), руски математичар јеврејског порекла, познат по свом доприносу теорији димензија и фундаменталним резултатима из топологије.

Теорема 6.1 (Подела јединице)**.** Нека су $U_1, ..., U_n$ отворени подскупови локално компактног Хаусдорфовог[11] простора X, и нека је $K \subset X$ компактан и

$$K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

Тада за свако $j = 1, ..., n$ постоји $\phi_j \in C(X), 0 \leqslant \phi_j \leqslant 1$, подржано на V_j такво да

$$\varphi_1(x) + \cdots \varphi_n(x) = 1, \quad \forall x \in K.$$

Доказ. По леми 6.2, постоје $\mathcal{V} = \{V_i : i = 1, ..., n\}$ и $\mathcal{W} = \{W_i : i = 1, ..., n\}$ отворени покривачи скупа K такви да је $W_i \subset \overline{W_i} \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ за свако $i = 1, ..., n$. Пошто су, за свако $i = 1, ..., n$, $\overline{W_i}$ и $X - V_i$ затворени и дисјунткни, постоји непрекидна функција f_i таква да је $f_i(\overline{W_i}) = 1$ и $f_i(X - V_i)$. Нека је $f = f_1 + \cdots + f_n$. За свако $x \in K$, $x \in W_k$ за неко $k \in \{1, ..., n\}$ па је $f_k(x) = 1 > 0$ тј. $f(x) > 0$ за свако $x \in K$. Дефинишимо $\varphi_i = \dfrac{f_i}{f}$ за свако $i = 1, ..., n$. Приметимо да је

$$\varphi_1(x) + \cdots \varphi_n(x) = 1, \text{ за свако } x \in K$$

и $\operatorname{supp}(\varphi_i) = \overline{\{x \in X : \varphi_i(x) > 0\}} \subset \overline{V_i} \subset U_i$ па су $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ тражене функције. □

Сада ћемо навести једну битну последицу овога чији доказ нећемо исписати.

Теорема 6.2. (Шаудер[12]-Тиконовова[13])Нека је X локално конвексан простор, $K \subset X$ непразан и конвексан, $K_0 \subset K$, K_0 компактан. Ако је $f : K_0 \to K$ непрекидна функција, онда постоји $\overline{x} \in K_0$ такво да $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

Теорема 6.3. (Шеферова[14] теорема о фиксној тачки)Нека је X Банахов простор и $f : X \to X$ непрекидна компактна функција. Претпоставимо да је скуп

$$F = \{x \in X : \text{постоји } \lambda \in [0, 1], \quad x = \lambda f(x)\}$$

ограничен. Тада f има фиксну тачку.

[11]Felix Hausdorff (1868–1942), немачки математичар, познат као један од оснивача модерне топологије, као и по доприносима теорији скупова, теорији мера и функционалној анализи.

[12]Juliusz Paweł Schauder (1899-1943), пољски математичар јеврејског порекла, познат по свом доприносу фунцкионалној анализи, парцијалним диференцијалним једначинама и математичкој физици.

[13]Andrey Nikolayevich Tikhonov (1906–1993), руски математичар и геофизичар, познат по свом доприносу топологији, функционалној анализи и математичкој физици.

[14]Helmut Heinrich Schaefer(1925-2005), немачки математичар, познат по свом доприносу функционалној анализи.

Доказ. Нека је $r > \sup_{x\in F}\|x\|$. Дефинишимо функцију

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \|f(x)\| \leqslant 2r, \\ \frac{2rf(x)}{\|f(x)\|} & , \|f(x)\| > 2r. \end{cases} \tag{2}$$

Приметимо да важи $\|g(x)\| \leqslant 2r$, па $g : \overline{B_X(0,2r)} \to \overline{B_X(0,2r)}$ и g је непрекидна и компактна, па по теореми 6.2. постоји x_0 такво да је $g(x_0) = x_0$. Ако би било $\|f(x_0)\| > 2r$, онда би $\|x_0\| = \left\|\dfrac{2rf(x_0)}{\|f(x_0)\|}\right\| = 2r$, што значи да $\dfrac{2r}{\|f(x_0)\|}f(x_0) = x_0 \notin F$ што је немогуће. Дакле $\|f(x_0)\| > 2r$ па $x_0 = g(x_0) = x_0$. $\square$

7

Проблем инваријантног потпростора

Проблем инваријантног потпростора је главни нерешени проблем теорије оператора. Он је привукао пажњу многих математичара, а формулација му је прилично једноставна: нека је X Банахов простор и $T \in L(X)$ оператор, наћи затворен нетривијалан потпростор M простора X ($M \neq X$ и $M \neq \{0\}$) за који је $TM \subset M$. Такво M се зове *инваријантан потпростор* за T. Познато је да немају све непрекидни линеарни оператори над Банаховим простором свој инваријантни потпростор. Проблем је још отворен за Хилбертове просторе. Највише генерализован и у исто време најспектакуларнији резултат на ову тему је добио Ломоносов. Наиме, то тврђење каже да постоји хиперинваријантан потпростор за велику класу оператора. У доказу тог тврђења круцијалну улогу игра Шаудер-Тихонофова теорема. Да бисмо га доказали, морамо прво да дефинишемо хиперинваријантни потпростор.

Дефиниција 7.1. Нека је X Банахов простор. Инваријантан потпростор M за $T \in L(X)$ се зове *хиперинваријантан* ако је инваријантан за све операторе који комутирају са T.

Лема 7.1. Ако је $T \in L(H)$ нескаларан, тј. није умножак индентичке функције, са својственом вредности λ, онда је својствени простор M за λ хиперинваријантан за T.

Доказ. Заиста,ако $x \in M$ и T комутира са T, имамо да

$$\lambda T'x = T'\lambda x = T'Tx = TT'x,$$

па $T'x \in M$. □

Теорема 7.1. (Ломоносовова[15]) Нека је X Банахов простор и $T \in L(X)$ нескаларни линеарни оператор који комутира са ненула компактним оператором $S \in L(X)$. Тада T има хиперинваријантни потпростор.

Пре самог доказа, приметимо следеће. Нека је $S \in L(X)$ компактни оператор. Ако је $\lambda \neq 0$ његова сопствена вредност, онда сопствени простор

$$F = \{x \in X : Sx = \lambda x\}$$

[15]V.I. Lomonosov, руски математичар 20. века, познат по свом доприносу теорији оператора

има коначну димензију. Заиста, рестрикција оператора S на F је (ненула) умножилац идентичке функције. Са друге стране, идентичка функција је компактна ако и само ако је простор коначне димензије, дакле F мора бити коначне димензије.

Доказ. Нека ја $\mathcal{A}$ алгебра оператора који комутирају са T. Ако T нема хиперинваријантни потпростор, онда $\overline{\mathcal{A}x} = X$ за свако $x \in X$. Без умањења општости, нека је $\|S\|_{L(X)} \leqslant 1$. Одаберимо $x_0 \in X$ такво да $\|Sx_0\| > 1$ (што имплицира $\|x_0\| > 1$) и скуп $B = \overline{B_X(x_0, 1)}$. За $x \in \overline{SB}$ (приметимо да $x \neq 0$) постоји $T' \in \mathcal{A}$ такво да $\|T'x - x_0\| < 1$. Дакле свако $x \in \overline{SB}$ има отворену околину V_x, такву да $T'V_x \subset B$, за неко $T' \in \mathcal{A}$. Због компактности $\overline{SB}$, он има прекривач $V_1, ..., V_n$ и $T'_1, ..., T'_n \in \mathcal{A}$ такве да

$$T'_j V_j \subset B, \quad \forall j = 1, ..., n$$

Нека су $\varphi_1, ..., \varphi_n \in C(\overline{SB})$ поделе јединице за $\overline{SB}$ за покривач $\{V_j\}$. За $x \in B$, дефинишимо,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(Sx) T'_j Sx.$$

Тада је $f : B \to B$ непрекидна. Пошто је $T'_j S$ компактно пресликавање за свако j, видимо да је $f(B)$ релативно компактан. Дакле, по теореми 6.2, постоји $\overline{x} \in B$ такво да је $f(\overline{x}) = \overline{x}$. Ако дефинишемо оператор $\overline{T} \in \mathcal{A}$ као

$$\overline{T} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(S\overline{x}) T'_j,$$

добијамо

$$\overline{T} S \overline{x} = \overline{x}.$$

Али $\overline{T}S$ је компактан оператор, па његов сопствени простор F (са сопственом вредности 1) има коначну димензију. Пошто $\overline{T}S$ комутира са T, видимо да је F инваријантан за T, што значи да T има својствену вредност па по леми 7.1. има хиперинваријантан потпростор, што се противи нашој претпоставци. $\square$

8

Закључак

Овај рад се бави областима математике које превазилазе средњошколско градиво. Покушао сам да ову занимљиву, лепу и захтевну тему што више приближим читаоцу. Надам се да сам, бар донекле, то и успео.
Да би се рад у потпуности разумео, потребно је познавање факултетске математике. Наиме, залазио сам у области као што су реална анализа, топологија, функционална анализа и линеарна алгебра. Јасно ми је да ће читалац, осим ако се није раније бавио горе споменутим областима, имати потешкоћа са разумевањем свих дефиниција и доказа које сам користио, али поента рада је да се читалац упусти у размишљање о апстрактним сферама математике. Такође, рад даје представу младим људима о томе чиме се модерна математика бави и шта их то можда очекује ако се у будућности буду бавили њоме.
Хтео бих да се захвалим свим професорима математике који су ми предавали, а посебно мом предметном професору и ментору, др Соњи Чукић. Без ње не бих могао да савладам градиво које ми је било потребно за писање овог рада. Наиме, она ми је пажљиво бирала факултетску литературу коју сам ишчитавао у протеклих годину дана. Поред тога што ми је служило као јак ослонац за писање овог рада, читање ме је увело у свет модерне математике којом планирам да се бавим у предстојећем периоду.
Теорема о фиксној тачки има много, али ја сам у овом раду издвојио оне које су ми се највише свиделе. Мислим да сам, кроз разне примере, доказао читаоцу колико су оне вредне изучавања.

9

Литература

1.Vittorino Pata, *Fixed Point Theorems and Applications*, Dipartmento di Matematica "F. Brioschi", Milano, Italy, 2013.

2.Christiane Rousseau, *Banach Fixed Point Theorem and Applications*, Université de Montréal, Montréal, Canada, 2010.

3.V. I. Arnol'd, *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1992.